ДОПОЛНЕНИЯ К ПРОФИЛЬНОМУ ЕГЭ

1. Найдите значение выражения $\frac{\log_2 12,8-\log_2 0,8}{5^{\log_{25}16}}$. Ответ: 1

2. Найдите значение выражения $\frac{\log_2 3,2-\log_2 0,2}{3^{\log_9 25}}$. Ответ: 0,8

3. Найдите корень уравнения $3^{\log_9(5x-5)}=5$. Ответ: 6

4. Найдите корень уравнения $2^{\log_8(5x-3)}=4$. Ответ: 13,4

---

1. Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре $C=2\cdot10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключен резистор с сопротивлением $R=5\cdot10^{6}$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0=16$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t=\alpha RC\log_2\frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha=0,7$ – постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 21 с. Ответ дайте в киловольтах. Ответ: 2

2. Для обогрева помещения, температура в котором поддерживается на уровне $T_п=20\ ^\circ C$, через радиатор отопления пропускают горячую воду. Расход проходящей через трубу воды $m=0,3$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x, вода охлаждается от начальной температуры $T_в=60\ ^\circ C$ до температуры $T(^\circ C)$, причем $x=\alpha\frac{cm}{\gamma}\log_2\frac{T_в-T_п}{T-T_п}$, где $c=4200\frac{Дж}{кг\cdot{}^\circ C}$ — теплоемкость воды, $\gamma=21\frac{Вт}{м\cdot{}^\circ C}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha=0,7$ — постоянная. Найдите, до какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы радиатора равна 84 м. Ответ: 30

3. Водолазный колокол, содержащий в начальный момент времени $\upsilon=3$ моля воздуха объемом $V_1=8$ л, медленно опускают на дно водоема. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного объема V_2. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A=\alpha\upsilon T\log_2\frac{V_1}{V_2}$ (Дж), где $\alpha=5,75$ – постоянная, а $T=300$ K – температура воздуха. Какой объем V_2 (в литрах) станет занимать воздух, если при сжатии газа была совершена работа в 10 350 Дж? Ответ: 2

4. Водолазный колокол, содержащий $\upsilon=2$ моля воздуха при давлении $p_1=1,5$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного давления p_2. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A=\alpha\upsilon T\log_2\frac{p_2}{p_1}$, где $\alpha=5,75$ — постоянная, $T=300$ К — температура воздуха. Найдите, какое давление p_2 (в атм) будет иметь воздух в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа в 6900 Дж. Ответ: 6

---

1. Найдите наименьшее значение функции $y=3x-\ln(x+3)^3$ на отрезке [−2,5; 0]. Ответ: -6

2. Найдите наименьшее значение функции $y=4x-4\ln(x+7)+6$ на отрезке $[-6,5;0]$. Ответ: -18

3. Найдите наименьшее значение функции $y=9x-\ln(9x)+3$ на отрезке $\left[\frac{1}{18};\frac{5}{18}\right]$. Ответ: 4

4. Найдите наибольшее значение функции $y=2x^2-13x+9\ln x+8$ на отрезке $\left[\frac{13}{14};\frac{15}{14}\right]$. Ответ: -3

5. Найдите точку максимума функции $y=\ln(x+5)-2x+9$. Ответ: -4,5

6. Найдите точку максимума функции $y=\ln(x+5)^5-5x$. Ответ: -4

7. Найдите точку минимума функции $y=4x-4\ln(x+7)$. Ответ: -6

8. Найдите точку минимума функции $y=2x^2-5x+\ln x-3$. Ответ: 1

9. Найдите точку максимума функции $y=2\ln(x+4)^3-8x-19$. Ответ: -3,25

Решение

1. Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре $C = 2\cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключен резистор с сопротивлением $R = 5\cdot 10^{6}$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 16$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC\log_2\dfrac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 0,7$ – постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 21 с. Ответ дайте в киловольтах.

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $t \ge 21$ при заданных значениях начального напряжения на конденсаторе $U_0 = 16$ кВ, сопротивления резистора $R = 5\cdot 10^{6}$ Ом и ёмкости конденсатора $C = 2\cdot 10^{-6}$ Ф:

$$t \ge 21 \Leftrightarrow 0{,}7\cdot 2\cdot 10^{-6}\cdot 5\cdot 10^{6}\cdot \log_2\frac{16}{U} \ge 21 \Leftrightarrow \log_2\frac{16}{U} \ge 3 \Leftrightarrow \frac{16}{U}$$

кВ.

Ответ: 2.

2. Для обогрева помещения, температура в котором поддерживается на уровне $T_{\text{п}} = 20\ ^\circ\text{C}$, через радиатор отопления пропускают горячую воду. Расход проходящей через трубу воды $m = 0,3$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x, вода охлаждается от начальной температуры $T_{\text{в}} = 60\ ^\circ\text{C}$ до температуры $T(^\circ\text{C})$, причем $x = \alpha\dfrac{cm}{\gamma}\log_2\dfrac{T_{\text{в}} - T_{\text{п}}}{T - T_{\text{п}}}$, где $c = 4200\dfrac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C}}$ — теплоемкость воды, $\gamma = 21\dfrac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot{}^\circ\text{C}}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 0,7$ — постоянная. Найдите, до какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы радиатора равна 84 м.

Решение.

Задача сводится к решению уравнения $\alpha\dfrac{cm}{\gamma}\log_2\dfrac{T_{\text{в}} - T_{\text{п}}}{T - T_{\text{п}}} = 84$ при заданных значениях теплоёмкости воды $c = 4200\ \dfrac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C}}$, коэффициента теплообмена $\gamma = 21\ \dfrac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot{}^\circ\text{C}}$, постоянной $\alpha = 0,7$, температуры помещения $T_{\text{п}} = 20\ ^\circ\text{C}$ и расхода воды $m = 0,3\ \text{кг/с}$:

$$0,7\cdot\frac{4200\cdot 0,3}{21}\log_2\frac{60-20}{T-20} = 84 \Leftrightarrow \log_2\frac{40}{T-20} = 2 \Leftrightarrow \frac{40}{T-20} = 4 \Leftrightarrow$$

Ответ: 30.

3. Водолазный колокол, содержащий в начальный момент времени $A = \alpha\upsilon T\log_2\dfrac{V_1}{V_2}$ $\upsilon = 3$ моля воздуха объемом $V_1 = 8$ л, медленно опускают на дно водоема. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного объема V_2. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением (Дж), где $\alpha = 5,75$ – постоянная, а $T = 300$ K – температура воздуха. Какой объем V_2 (в литрах) станет занимать воздух, если при сжатии газа была совершена работа в 10 350 Дж?

Решение.

Задача сводится к решению уравнения $\alpha\upsilon T\log_2\dfrac{V_1}{V_2} = 10350$ при заданных значениях постоянной $\alpha = 5,75$, температуры воздуха $T = 300$ К, количества воздуха $\upsilon = 3$ моль и объема воздуха $V_1 = 8$ л:

$$5,75\cdot 3\cdot 300\cdot\log_2\frac{8}{V_2} = 10350 \Leftrightarrow \log_2\frac{8}{V_2} = 2 \Leftrightarrow \frac{8}{V_2} = 4 \Leftrightarrow V_2 = 2$$

Ответ: 2.

4.

Водолазный колокол, содержащий $\upsilon = 2$ моля воздуха при давлении $p_1 = 1,5$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного давления p_2. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha \upsilon T \log_2 \frac{p_2}{p_1}$, где $\alpha = 5,75$ — постоянная, $T = 300$ К — температура воздуха. Найдите, какое давление p_2 (в атм) будет иметь воздух в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа в 6900 Дж.

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $\alpha \upsilon T \log_2 \frac{p_2}{p_1} \le 6900$ при заданных значениях постоянной $\alpha = 5{,}75$, температуры воздуха $T = 300$ К, начального давления $p_1 = 1,5$ атм и количества воздуха $\upsilon = 2$ моль:

$$5,75 \cdot 2 \cdot 300 \cdot \log_2 \frac{p_2}{1,5} \le 6900 \Leftrightarrow \log_2 \frac{p_2}{1,5} \le 2 \Leftrightarrow \frac{p_2}{1,5} \le 4 \Leftrightarrow p_2$$

атм.

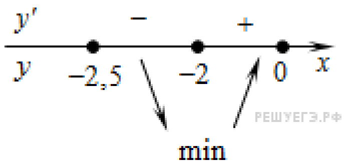
Ответ: 6.

1. Найдем производную заданной функции: $y'(x) = 3 - \frac{3}{x+3}$.

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} 3 - \frac{3}{x+3} = 0, \\ -2,5 \le x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x+3} = 1, \\ -2,5 \le x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ -2,5 \le x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2.$$

Определим знаки производной функции на заданном отрезке и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = -2$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение:

$$y(-2) = -2 \cdot 3 - \ln 1 = -6.$$

Ответ: −6.

2. Найдите наименьшее значение функции $y = 4x - 4\ln(x+7) + 6$ на отрезке $[-6,5;0]$.

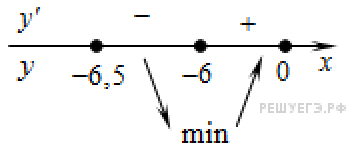
Решение.

Найдем производную заданной функции: $y'(x) = 4 - \frac{4}{x+7}$.

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} 4 - \frac{4}{x+7} = 0, \\ -6,5 \le x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6, \\ -6,5 \le x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -6.$$

Определим знаки производной функции на заданном отрезке и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = -6$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение:

$$y(-6) = -6 \cdot 4 - 4\ln 1 + 6 = -18.$$

Ответ: −18.

3. Найдите наименьшее значение функции $y = 9x - \ln(9x) + 3$ на отрезке $\left[\frac{1}{18}; \frac{5}{18}\right]$.

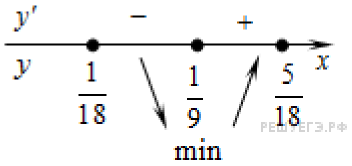
Решение.

Функция определена и дифференцируема на заданном отрезке. Найдем ее производную:

$$y'(x)=9-\frac{1}{x}.$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} 9-\frac{1}{x}=0, \\ \frac{1}{18}\le x\le\frac{5}{18} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{9}, \\ \frac{1}{18}\le x\le\frac{5}{18} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1}{9}.$$



В точке $x=\frac{1}{9}$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение:

$$y\left(\frac{1}{9}\right)=\frac{1}{9}\cdot 9-\ln 1+3=4.$$

Ответ: 4.

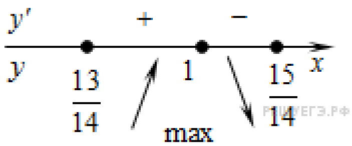
4. Найдите наибольшее значение функции $y=2x^2-13x+9\ln x+8$ на отрезке $\left[\frac{13}{14};\frac{15}{14}\right]$.

Решение.

Найдем производную заданной функции: $y'=4x-13+\frac{9}{x}.$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} 4x-13+\frac{9}{x}=0, \\ \frac{13}{14}\le x\le\frac{15}{14} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=1, \\ x_2=\frac{18}{8}, \end{array}\right. \\ \frac{13}{14}\le x\le\frac{15}{14} \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$



В точке $x=1$ заданная функция имеет максимум, являющийся ее наибольшим значением на заданном отрезке. Найдем это наибольшее значение:

$$y(1)=2\cdot 1-13\cdot 1+9\cdot 0+8=-3.$$ Ответ: −3.

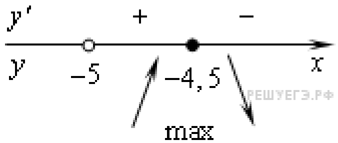
5. Найдите точку максимума функции $y=\ln(x+5)-2x+9.$

Решение.

Функция определена и дифференцируема на $(-5;+\infty)$. Найдем производную заданной функции: $y'=\frac{1}{x+5}-2.$

Найдем нули производной:

$$\frac{1}{x+5}-2=0\Leftrightarrow x+5=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=-4{,}5.$$



Искомая точка максимума $x=-4{,}5.$

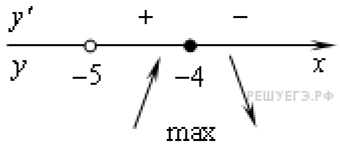
Ответ: −4,5.

6. Найдите точку максимума функции $y=\ln(x+5)^5-5x.$

Решение.

Найдем производную заданной функции: $y'=\frac{5}{x+5}-5.$

Найдем нули производной: $\frac{5}{x+5}-5=0\Leftrightarrow x=-4.$



Искомая точка максимума $x=-4.$

Ответ: −4.

7. Найдите точку минимума функции $y = 4x - 4\ln(x+7)$.

Решение.

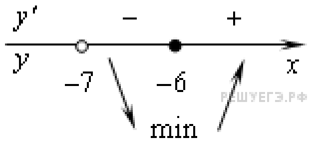
Заметим, что $y = 4x - 4\ln(x+7)$. Область определения функции — открытый луч $(-7; +\infty)$. Найдем производную заданной функции:

$$y'(x) = 4 - \frac{4}{x+7}.$$

Найдем нули производной:

$$4 - \frac{4}{x+7} = 0 \Leftrightarrow x = -6.$$

Найденная точка лежит на луче $(-7; +\infty)$.



Искомая точка минимума $x = -6$.

Ответ: −6.

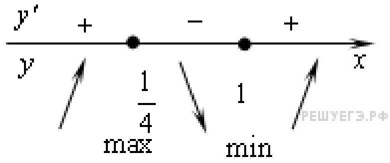
8. Найдите точку минимума функции $y = 2x^2 - 5x + \ln x - 3$.

Решение.

Найдем производную заданной функции: $y' = 4x - 5 + \frac{1}{x}$.

Найдем нули производной:

$$4x - 5 + \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = \frac{1}{4}. \end{array}\right.$$



Искомая точка минимума $x = 1$.

Ответ: 1.

9. Найдите точку максимума функции $y = 2\ln(x+4)^3 - 8x - 19$.

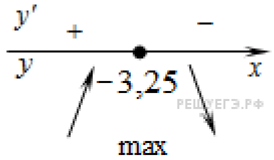
Решение.

Заметим, что $y = 6\ln(x+4) - 8x - 19$ при $x > -4$. Найдем производную этой функции:

$$y' = \frac{6}{x+4} - 8.$$

Найдем нули производной:

$$\frac{6}{x+4} - 8 = 0 \Leftrightarrow x = -3{,}25.$$



Искомая точка максимума $x = -3{,}25$.

Ответ: −3,25.